

Varianta 046

SUBIECTUL I

- a) $4 + 3i$.
- b) $\frac{1}{2}$.
- c) 18.
- d) 5.
- e) 1.
- f) $2 \cdot 1 - 8 + 6 = 0$.

SUBIECTUL II

- 1.
- a) 10.
- b) 2.
- c) $1 \in A$.
- d) $\frac{2}{5}$.
- e) $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- 2.
- a) $h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
- b) $x=0$ este asimptotă verticală.
- c) $x \in (0, 1]$.
- d) $x_0 = -1$ este punct de maxim local, iar $x_1 = 1$ este punct minim de local.
- e) $\frac{3}{2} + \ln 2$.

SUBIECTUL III

- a) $f_1(2) = 2, f_2(3) = 7$.
- b) $1_R(x) = 1 \cdot x + 1 - 1 \in G$.
- c) $(f_a \circ f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = a(bx + b - 1) + a - 1 = abx + ab - 1 = f_{ab}(x), \forall f_a, f_b \in G$.
- d) $(f_a \circ 1_R)(x) = f_a(1_R(x)) = f_a(x), \forall x \in \mathbf{R}$.

Deci $f_a \circ 1_R = f_a$.

$(1_R \circ f_a)(x) = 1_R(f_a(x)) = f_a(x), \forall x \in \mathbf{R}$. Deci $1_R \circ f_a = f_a$.

Am obținut $f_a \circ 1_R = 1_R \circ f_a = f_a$.

e) Din c) avem $f_k \circ f_j = f_{kj}$. $f_j \circ f_k = f_{jk}$.

Cum $f_{jk} = 1_R$, avem $f_{jk}(x) = jkx + jk - 1 = x$ sau $x(jk - 1) = 1 - jk, \forall x \in \mathbf{R}$.

Deci $jk - 1 = 0$. Atunci $j = \frac{1}{k} = k^{-1}$.

$$f_{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k}x + \frac{1}{k} - 1 \in G. \text{ Deci există } f_j = f_{\frac{1}{k}} \in G \text{ astfel încât } f_k \circ f_j = f_j \circ f_k = 1_R.$$

f) Din **c)** $\forall f_a, f_b \in G$ avem $f_a \circ f_b = f_{ab} \in G$.

Asociativitatea $(f_a \circ f_b) \circ f_c = f_a \circ (f_b \circ f_c), \forall f_a, f_b, f_c \in G$.

Din **c)** avem $(f_a \circ f_b) \circ f_c = f_{ab} \circ f_c = f_{abc}, f_a \circ (f_b \circ f_c) = f_a \circ f_{bc} = f_{abc}$.

Deci $(f_a \circ f_b) \circ f_c = f_a \circ (f_b \circ f_c)$.

Elementul neutru.

$\exists f_e \in G$ astfel încât $f_a \circ f_e = f_e \circ f_a = f_a$. Din **d)** avem $f_e = 1_R$.

Elementul simetrizabil

$\forall f_k \in G, \exists f_j \in G$ astfel încât $f_k \circ f_j = f_j \circ f_k = 1_R$.

$$f_j = f_{\frac{1}{k}}.$$

Deci operația de compunere a funcțiilor determină o structură de grup pe mulțimea G .

g) Din **c)** avem $f_a \circ f_a = f_{aa} = f_{a^2}$. Presupunem $\underbrace{f_a \circ f_a \circ f_a \circ \dots \circ f_a}_{2007 \text{ ori}} = f_{a^{2007}}$

Demonstrăm că $\underbrace{f_a \circ f_a \circ f_a \circ \dots \circ f_a}_{2008 \text{ ori}} = f_{a^{2008}}$.

$$\underbrace{f_a \circ f_a \circ f_a \circ \dots \circ f_a}_{2008 \text{ ori}} = (\underbrace{f_a \circ f_a \circ \dots \circ f_a}_{2007 \text{ ori}}) \circ f_a = f_{a^{2007}} \circ f_a = f_{a^{2008}}.$$

Deci $\underbrace{f_a \circ f_a \circ f_a \circ \dots \circ f_a}_{2007 \text{ ori}} = f_{a^{2007}}$.

SUBIECTUL IV

a) $f(e) = 2 - e$.

b) $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$.

c) $f'(x) = 0, x \in (0, \infty)$ devine $\frac{1}{x} - 1 = 0$. Deci $x = 1 \in (0, \infty)$.

d)

x	0	1	∞
$f'(x)$		0	-
$f(x)$		Max	

$x_0 = 1$ este punct de maxim local. Deci f are un singur punct de extrem local.

e) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (1 + \ln x - x) = -\infty$. Deci $x=0$ este asimptotă verticală.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \ln x - x) = -\infty$ deci funcția f nu are asimptotă orizontală;

Studiem asimptota oblică

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \ln x - x}{x} = -1 ; \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \ln x - x + x) = +\infty$$

Deci f nu admite asimptota oblică.

f) $1 + \ln x \leq x$ devine $1 + \ln x - x \leq 0$ sau $f(x) \leq 0, \forall x \in (0, \infty)$.

Dar $x_0 = 1$ este punct de maxim local. Deci $f(x) \leq 0, \forall x \in (0, \infty)$.

$$\textbf{g)} \int_{\frac{1}{e}}^e f(x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^e (1 + \ln x - x) dx = x \Big|_{\frac{1}{e}}^e + \int_{\frac{1}{e}}^e \ln x dx - \frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{1}{e}}^e.$$

$$\text{Deci } \int_{\frac{1}{e}}^e f(x) dx = \left(e - \frac{1}{e} \right) + \frac{2}{e} - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} \right) = \frac{2e^3 + 2e - e^4 + 1}{2e^2}.$$